UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR **MA2112** **2011**
Departamento de Matemáticas primer EXAMEN PARCIAL (50%)
Puras y Aplicadas. 08 de junio de-2011

TIPO_B

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

1.- [13 ptos.] Sea f: $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ la función definida por $f(x\ y) = \begin{cases} \dfrac{y.\mathrm{sen}(x)}{3x^2+2y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

1a) halle, justificando, el subconjunto de $\mathbf{R}^2$ en cuyos puntos f es continua ;

1b) halle, justificando, el subconjunto de $\mathbf{R}^2$ en cuyos puntos f es derivable.

2.- [12 ptos.] Considere las funciones g:$\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$, f:$\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ y su función compuesta F(t) = f(g(t)).
Conociendo que $g(t) = (3t , t^2)$ y que las derivadas parciales de f,
calculadas en el punto (3, 1) son las siguientes :
$\frac{\partial f}{\partial x}(3, 1) = \frac{\partial f}{\partial y}(3, 1) = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(3, 1) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(3, 1) = 5$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(3, 1) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(3, 1) = -3$,

2a) halle $\frac{dF}{dt}(1)$;

2b) halle $\frac{d^2F}{dt^2}(1)$.

3.- [13 ptos.] Sea P el punto , de la gráfica de la función $f(x, y) = 2x^2+xy+y^2$,
en el cual el plano tangente es perpendicular al vector **AB** , siendo A(7, 1, 3) , B(-3, 9, 5).
Halle la ecuación del plano tangente en P.

4.- [12 ptos.] Sea g: A$\rightarrow$ **R** , la función definida por :

$$f(x, y) = 4x+8y+7 , A=\{(x, y) \mid 2x^2+y^2 \leq 18\}.$$

Halle el máximo y el mínimo absoluto de f en A .

S O L U C I O N

SE1
Observemos que por teoremas y propiedades conocidas, la función dada es continua y derivable en $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x,y) \neq (0, 0) \}$;
falta entonces averiguar que pasa en (0, 0).
Se verifica que acercándonos al origen a lo largo de cualquiera de los ejes el límite es =0 ;
sin embargo, aacercándonos al origen a lo largo de una recta de ecuación y=mx, el límite resulta :

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR **MA2112** **2011**
Departamento de Matemáticas primer EXAMEN PARCIAL (50%)
Puras y Aplicadas. 08 de junio de-2011

TIPO_B

$$\lim_{x\to 0} \frac{mx.\text{sen}(x)}{(3+2m^2)x^2} = \frac{m}{3+2m^2} \neq 0 \text{ , si } m\neq 0$$

de manera que podemos afirmar que el límite no existe;
para que la función fuese continua en (0, 0) , debería existir este límite y ser igual al valor f(0, 0) = 0 de la función. Por lo tanto **f no es continua en (0, 0).**
Como toda función derivable en un punto, (a, b), interno de su dominio es necesariamente continua en (a, b) , podemos afirmar tambieen que **f no es derivable en (0, 0).**
En conclusión, los dos subconjuntos de R^2 pedidos en las partes a), b) de esta pregunta, son ámbos iguales al conjunto $\{(x, y)\in \mathbf{R}^2 \mid (x,y)\neq(0, 0) \}$.

S2a) Indicando, con el símbolo h_u la derivada de una genérica función h respecto a la variable u, tenemos :

$F(t) = f(\mathbf{g}(t))=f(x(t), y(t))$; $F_t= f_x.x_t+f_y.y_t$

y calculando las derivadas f_x., f_y en (x, y)=$\mathbf{g}$(1)=(3, 1) ,

$\mathbf{g'}(1) = [x_t(1), y_t(1)] = [3, 2t]_{t=1}= [3, 2]$, $F_t(1) = 2.3+2.2 = 10$.

S2b) $F_{tt}= \frac{dF_t}{dt} = \frac{d}{dt}(f_x.x_t+f_y.y_t) = \frac{d}{dt}(f_x.x_t) + \frac{d}{dt}(f_y.y_t) =$

$= [(\frac{d}{dt}(f_x))x_t+ f_x. \frac{d}{dt}(x_t)] + [(\frac{d}{dt}(f_y))y_t + f_y. \frac{d}{dt}(y_t)] = [*]$

$= (f_{xx}.x_t+f_{xy}y_t)x_t + f_x.x_{tt} + (f_{yx}.x_t+f_{yy}.y_t) y_t + f_y.y_{tt}$.

Como $x_{tt}(1) = 0$, $y_{tt}(1) = 2$, se tiene :

$F_{tt}(1) = (0.3+(-3).2).3+ 2.0 + ((-3).3+5.2)2 + 2.2 = - 18+2+4 = - 12.$

TIPO_B

S3) Como $f_x(a, b) = 4a+b$, $f_y(a, b) = a+2b$, la ecuación del plano tangente a la gráfica de f, en el punto P(a, b, f(a, b)) será : z= f(a, b)+(4a+b)(x-a)+(a+2b)(y-b) y para que el vector normal de este plano, (4a+b , a+2b, -1), sea paralelo al vector **AB** = (-10, 8, 2) , deberemos tener :

$$(4a+b , a+2b, -1) = \lambda(-10, 8, 2) \text{ y por consiguiente : } \begin{cases} 4a+b = -10\lambda \\ a+2b = 8\lambda \\ -1 = 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases} ;$$

Como f(a, b) = f(2, -3) = 11, una ecuación del plano pedido es entonces :
z = 11+5(x-2)-4(y+3) , 5x-4y - z -11 = 0.

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR **MA2112** **2011**
Departamento de Matemáticas primer EXAMEN PARCIAL (50%)
Puras y Aplicadas. 08 de junio de-2011

S4) La función dada tiene máximo y mínimo absolutos, ya que es continua y tiene dominio cerrado y acotado.
Recordemos que los posibles puntos del dominio en los cuales la función tiene un máximo o un mínimo son : **i**) Puntos internos al dominio, en los cuales la función tiene derivada nula o no es derivable; **ii**) puntos de frontera.
Como la derivada de la función dada es [1, 2] , los únicos posibles puntos en donde la función pueda tener un máximo o un mínimo, son los puntos de la frontera del dominio de f $F(A) = \{ (x, y) \mid 2x^2+y^2=18\}$.
En la frontera F(A) , podemos actuar con el método de los multiplicadores de Lagrange o parametrizando.
Con el método de los **multiplicadores de Lagrange**, se tiene :

$$\begin{cases} \nabla f=\lambda\nabla(2x^2+y^2-18) \\ 2x^2+y^2=18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4=\lambda 4x \\ 8=\lambda 2y \\ 2x^2+y^2=18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\lambda^{-1} \\ y=4(\lambda^{-1}) \\ 2(\lambda^{-1})^2+16(\lambda^{-1})^2=18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\lambda^{-1} \\ y=4(\lambda^{-1}) \\ (\lambda^{-1})=\pm 1=\lambda \end{cases}$$

de manera que se obtienen dos "candidatos" para puntos de máximo y/o mínimo, a saber : con $\lambda=1$ se obtiene A(1, 4) y con $\lambda=-1$ se obtiene B(-1, -4) ;
considerando los valores del función dada en estos puntos :
f(A)=f(1, 4) = 43, f(B)=f(-1, -4)= -29 constatamos que el máximo de f es M=43 y el mínimo m= - 29 [ya que por el teorema de Weierstrass seguramente existen y los únicos puntos donde la funcion puede tomar los valores máximo y mínimo son A, B].
Parametrizando la frontera, se tiene lo siguiente.

Una elipse, de ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ se parametriza generalmente con $\begin{cases} x=a.\cos(t) \\ y=b.\mathrm{sen}(t) \\ 0 \le t \le 2\pi \end{cases}$ de manera

que en nuestro caso tenemos : $2x^2+y^2=18 \Rightarrow \frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{(3\sqrt{2})^2}=1 \Rightarrow \begin{cases} x=3.\cos(t) \\ y=3\sqrt{2}.\mathrm{sen}(t) \\ 0 \le t \le 2\pi \end{cases}$;

el valor de la función dada, en un punto genérico de la elipse es entonces :

$g(t)=12.\cos(t)+24\sqrt{2}.\mathrm{sen}(t)+7$ y su derivada, $g'(t)= -12.\mathrm{sen}(t)+24\sqrt{2}.\cos(t)$, se anula cuando $\mathrm{Tg}(t)= 2\sqrt{2}$.

$\mathrm{Tg}(t)= 2\sqrt{2} \Rightarrow \sec^2(t)= 9 \Rightarrow \cos(t) = \pm\frac{1}{3}$, $\mathrm{sen}(t) = \cos(t).\mathrm{Tg}(t)$, con lo cual se obtienen los mismos puntos A, B que hallamos antes con el método de Lagrange.